DM n°7 – Corrigé

Exercice 1 : Fractions rationnelles

1) La partie entière de la fraction est nulle. Factorisons son dénominateur dans $\mathbb{R}[X]$:

$$\begin{aligned} X^4+X^2+1 &= (X^2)^2+X^2+1 \\ &= Y^2+Y+1 \qquad \text{avec } Y=X^2 \\ &= (Y-j)(Y-\overline{j}) \\ &= (X^2-j)(X^2-\overline{j}) \end{aligned}$$

Or, $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ a pour racines carrées $\pm e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $\overline{j}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ a pour racines carrées $\pm e^{-i\frac{\pi}{3}}$. On a donc

$$\begin{aligned} X^4+X^2+1 &= (X-e^{i\frac{\pi}{3}})(X+e^{i\frac{\pi}{3}})(X-e^{-i\frac{\pi}{3}})(X+e^{-i\frac{\pi}{3}}) \\ &= (X-e^{i\frac{\pi}{3}})(X-\overline{e^{i\frac{\pi}{3}}})(X+e^{i\frac{\pi}{3}})(X+\overline{e^{i\frac{\pi}{3}}}) \\ &= \left(X^2-2\mathrm{Re}(e^{i\frac{\pi}{3}})X+1\right)\left(X^2+2\mathrm{Re}(e^{i\frac{\pi}{3}})X+1\right) \\ &= \left(X^2-X+1\right)(X^2+X+1) \end{aligned}$$

La décomposition obtenue est alors :

$$\frac{X^2+X-1}{X^4+X^2+1} = \boxed{\frac{X}{X^2-X+1}+\frac{-X-1}{X^2+X+1}}$$

2) Par ce qui précède,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{k^2-k+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k^2+k+1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\frac{j+1}{(j+1)^2-(j+1)+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k^2+k+1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\frac{j+1}{j^2+j+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k^2+k+1} \\ &= \underbrace{\frac{1}{1}}_{j=0}+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{j+1}{j^2+j+1}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k+1}{k^2+k+1}-\underbrace{\frac{n+1}{n^2+n+1}}_{k=n} \\ &= 1-\frac{n+1}{n^2+n+1} \end{aligned}$$

Or, $\dfrac{n+1}{n^2+n+1}\to 0$. Donc $\boxed{S_n \to 1}$.

Exercice 2 : Une preuve du théorème de d'Alembert-Gauss

Soit $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré $n\geq 1$. On souhaite montrer que P admet une racine dans $\mathbb{C}$.

1) a) On a $f(0)=|a_0|\in f(\mathbb{C})$, donc $f(\mathbb{C})$ est non vide. De plus, comme pour tout $z\in\mathbb{C}$, on a $f(z)=|P(z)|\in\mathbb{R}_+$, on voit que $f(\mathbb{C})$ est minorée par 0.

b) On a

$$\begin{aligned} f(z) &= \left|a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1}\cdots + a_1 z + a_0\right| \\ &= |z|^n\,|a_n+h(z)| \end{aligned}$$

avec

$$h(z)=\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_1}{z^{n-1}}+\frac{a_0}{z^n}$$

Or, quand $|z|\to+\infty$, on a

$$|h(z)|\leq \frac{|a_{n-1}|}{|z|}+\cdots+\frac{|a_1|}{|z|^{n-1}}+\frac{|a_0|}{|z|^n}\xrightarrow[|z|\to+\infty]{} 0$$

donc

$$\lim_{|z|\to+\infty}|a_n+h(z)|=|a_n|>0$$

(en effet $a_n\neq 0$ puisque $\deg P=n$). Et comme $\lim\limits_{|z|\to+\infty}|z|^n=+\infty$, on a par produit $\lim\limits_{|z|\to+\infty} f(z)=+\infty$.

Ensuite, par définition de la limite, il existe donc $A>0$ tel que :

$$\forall z\in\mathbb{C} \qquad |z|>A \implies f(z)>m+2024$$

Cela revient donc au même de prendre l'infimum de f sur $\mathbb{C}$ ou sur l'ensemble $D(0,A)=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\leq A\}$: ainsi $\inf\limits_{|z|\leq A} f(z)=\inf\limits_{z\in\mathbb{C}} f(z)=m.$[1]

c) (On ne peut pas appliquer le théorème des bornes atteintes car $f:\boxed{\mathbb{C}}\to\mathbb{R}$, mais on va adapter sa preuve). On a

$$m=\inf_{|z|\leq A} f(z)=\inf\{f(z)\mid z\in D(0,A)\}$$

Par définition de l'infimum, il existe une suite (z_n) d'éléments de $D(0,A)$ telle que $f(z_n)\to m$. Par ailleurs, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $|z_n|\leq A$, donc la suite (z_n) est

[1] Si on veut être plus précis, on peut passer par la caractérisation séquentielle et montrer que toute suite (z_n) telle que $f(z_n)\to m$ vérifie nécessairement $|z_n|\leq A$ à partir d'un certain rang. Cela justifie l'égalité des deux infima (infimums ?).

bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass complexe, il existe une sous-suite $(z_{\varphi(n)})$ qui converge vers un $\alpha \in \mathbb{C}$. La fonction f étant continue car composée de fonctions continues, on en déduit que $f(z_n) \to f(\alpha)$. Par unicité de la limite, $f(\alpha) = m$. D'où le résultat.

2) a) $\deg(P \circ (z_0 + X)) = \deg P \times \deg(z_0 + X) = \deg P = n$. Par ailleurs, $\dfrac{1}{P(z_0)}$ est une constante non nulle donc elle ne modifie pas le degré de $P(z_0 + X)$. D'où $\deg Q = n$.

b) On a $Q(0) = \dfrac{P(z_0 + 0)}{P(z_0)} = 1$. De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$|Q(z)| = \frac{f(z_0 + z)}{f(z_0)}$$

et comme f atteint son minimum en z_0, on a nécessairement $f(z_0 + z) \geq f(z_0)$. D'où le résultat.

c) Afin d'éviter les confusion, on note $j = \min\{k \in [\![1, n]\!] \mid b_k \neq 0\}$ (cela correspond aussi au j de la question d).). Par définition, b_j est non nul, donc $-\dfrac{1}{b_j}$ est bien défini et admet une racine j-ième dans $\mathbb{C}$ (et même j racines j-ièmes).

d) Par définition de j, on a

$$Q(X) = b_0 + \quad (0X + ... + 0X^{j-1}) \quad + b_j X^j + b_{j+1} X^{j+1} + \cdots + b_n X^n$$

donc (comme $b_0 = 1$)

$$\begin{aligned} g(t) = Q(ct) &= 1 + b_j c^j t^j + b_{j+1} c^{j+1} t^{j+1} + \cdots + b_n c^n t^n \\ &= 1 + b_j \left(-\frac{1}{b_j}\right) t^j + t^j \left(b_{j+1} c^{j+1} t + \cdots + b_n c^n t^{n-j}\right) \qquad \text{car } c^j = -\frac{1}{b_j} \\ &= 1 - t^j + \underset{t \to 0}{o}(t^j) \qquad \text{car } \left(b_{j+1} c^{j+1} t + \cdots + b_n c^n t^{n-j}\right) \xrightarrow[t \to 0]{} 0 \end{aligned}$$

e) Par ce qui précède,

$$\frac{g(t) - (1 - t^j)}{t^j} \xrightarrow[t \to 0]{} 0$$

Soit $t \in]0, 1[$ tel que

$$\left| \frac{g(t) - (1 - t^j)}{t^j} \right| \leq \frac{1}{2}$$

Alors

$$\begin{aligned} & \left|g(t) - (1 - t^j)\right| \leq \frac{|t^j|}{2} \\ \Longrightarrow\ & |g(t)| - |(1 - t^j)| \leq \frac{|t^j|}{2} \quad \text{par la seconde inégalité triangulaire} \\ \Longrightarrow\ & |g(t)| - (1 - t^j) \leq \frac{1}{2} t^j \quad \text{car } t \in]0, 1[\\ \Longrightarrow\ & |g(t)| \leq 1 - \frac{t^j}{2} < 1 \qquad \text{car } t \in]0, 1[\end{aligned}$$

Ainsi, $|g(t)| = |Q(ct)| < 1$. On en déduit que

$$|P(z_0 + ct)| < |P(z_0)|$$

ce qui est une contradiction. Le théorème de d'Alembert-Gauss est donc démontré.